Option T

Durée : 4 heures

On désigne par

$\mathbb{R}$ le corps des nombres réels,

$\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels non nuls,

$\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, rapporté à un repère $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

$\mathcal{E}^*$ l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ distincts de Ω,

$\mathcal{P}$ le plan de $\mathcal{E}$ passant par le point O défini par $\Omega\vec{O} = \vec{k}$, de direction le sous espace engendré par $\vec{i}$ et $\vec{j}$, et rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Les différentes coordonnées de points et équations d'ensembles de points données ou demandées sont relatives au repère $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ou au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Première partie

α, β et γ désignent des réels donnés.

Soit $\mathcal{C}$ la parabole de $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne

$$x^2 - 2y = 0.$$

1.1) Donner l'équation cartésienne du cône $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{E}$, de sommet Ω, et s'appuyant sur $\mathcal{C}$, sous la forme $q(x, y, z) = 0$ où q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.

1.2) Former la matrice de q dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1.3) φ désignant la forme bilinéaire symétrique associée à q, deux points M_1 et M_2 de $\mathcal{E}^*$ sont dits conjugués par rapport à Ω si et seulement si $\varphi(\overrightarrow{\Omega M_1}, \overrightarrow{\Omega M_2}) = 0$.

Deux ensembles de points de $\mathcal{E}^*$ sont dits conjugués par rapport à Ω si et seulement si tout point de l'un est conjugué de tout point de l'autre.

On appelle conjugué par rapport à Ω d'un ensemble E_1 de points de $\mathcal{E}^*$, le plus grand ensemble E_2 de points de $\mathcal{E}^*$ tel que E_1 et E_2 soient conjugués par rapport à Ω.

1.3.1) M_1 étant donné dans $\mathcal{E}^*$, trouver le conjugué par rapport à Ω de $\{M_1\}$.

$\mathcal{D}_1$ étant l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OM_1}$ où λ parcourt $\mathbb{R}^*$, donner le conjugué de $\mathcal{D}_1$ par rapport à Ω.

1.3.2) $\mathcal{P}_1$ étant le plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ privé de Ω, trouver son conjugué par rapport à Ω.

1.4) Deux points de $\mathcal{P}$ sont dits conjugués par rapport à $\mathcal{C}$ si et seulement si ces points sont conjugués par rapport à Ω.

Deux ensembles de points de $\mathcal{P}$ sont dits conjugués par rapport à $\mathcal{C}$ si et seulement si tout point de l'un est conjugué de tout point de l'autre par rapport à $\mathcal{C}$.

On appelle conjugué par rapport à $\mathcal{C}$ d'un ensemble E_1 de points de $\mathcal{P}$, le plus grand ensemble E_2 de points de $\mathcal{P}$ tel que E_1 et E_2 soient conjugués par rapport à $\mathcal{C}$.

1.4.1) Soit M_1 de coordonnées x_1 et y_1 donné dans $\mathcal{P}$. Trouver l'ensemble des conjugués par rapport à $\mathcal{C}$ de M_1.

1.4.2) Soit $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ l'équation d'une droite donnée $\mathcal{D}_1$ de $\mathcal{P}$.
Trouver le conjugué par rapport à $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}_1$.

Deuxième partie

Soient $\mathcal{P}_e$ et $\mathcal{P}_i$ les parties de $\mathcal{P}$ définies respectivement par $x^2 - 2y > 0$, et $x^2 - 2y < 0$.

2.1) Par tout point M_0 donné de $\mathcal{P}_e$, de coordonnées (x_0, y_0), on mène deux tangentes distinctes à $\mathcal{C}$: soient T_1 et T_2 les points de contact : écrire l'équation cartésienne de la droite $T_1 T_2$.

Cette droite est-elle l'ensemble conjugué par rapport à $\mathcal{C}$ de $\{M_0\}$?

2.2) Soit maintenant M_0 un point donné de $\mathcal{P}_i$, de coordonnées (x_0, y_0), et soit $\mathcal{D}_{0,\mu}$ la droite de $\mathcal{P}$ passant par M_0 , et de coefficient directeur μ. $\mathcal{D}_{0,\mu}$ coupe $\mathcal{C}$ en deux points distincts I_1 et I_2 .
Les tangentes à $\mathcal{C}$ en I_1 et I_2 se coupent en J.

Déterminer l'ensemble des points J lorsque μ parcourt $\mathbb{R}$.

Le comparer avec le conjugé par rapport à $\mathcal{C}$ de $\{M_0\}$.

Troisième partie

A tout point $m(x,y)$ de $\mathcal{P}$, on associe la droite $P(m)$ de $\mathcal{P}$ d'équation $Xx - Y - y = 0$ dont X et Y sont les coordonnées du point générique : cette droite est appelée **polaire** de m.
A toute droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$, non parallèle à $\vec{j}$, d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ on associe le point $p(\mathcal{D})$ de coordonnées $\left(\frac{-\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\beta}\right)$;
ce point est appelé **pôle** de $\mathcal{D}$.

3.1) Déterminer $p(P(m))$ et $P(p(\mathcal{D}))$.

3.2) Soit γ une courbe de $\mathcal{P}$ définie par une équation :

$$x \mapsto \overrightarrow{OM}(x) = x\vec{i} + y(x)\vec{j} \text{ où } y \text{ est de classe } C^2.$$

On appelle **élément de contact** tout ensemble formé par un point m de γ et la tangente T_m à γ en ce point.

3.2.1) à γ on associe l'ensemble Γ des pôles $p(T_m)$ des tangentes T_m à γ, et l'enveloppe Γ' des polaires $P(m)$, lorsque m parcourt γ.
La courbe γ étant définie par $x \mapsto M(x, y(x))$, former une équation paramétrique de Γ ainsi que de Γ'. Comparer Γ et Γ'.

3.2.2) Montrer que les applications p et P (définies au début de la troisième partie) transforment les éléments de contact relatifs à γ en les éléments de contact relatifs à Γ et réciproquement.

On appelle $\mathcal{T}$ l'application définie en 3.2.1) qui transforme γ en Γ ; calculer $\mathcal{T} \circ \mathcal{T}$ et en déduire $\mathcal{T}^{-1}$.

Quatrième partie

Les courbes envisagées dans cette partie sont supposéees de classe C^2 par morceaux et sans points d'inflexion.

4.1) Soit $(E) : f(x, y, y', y'') = 0$ une équation différentielle où y est la fonction inconnue de la variable x.

Une courbe γ de $\mathcal{P}$ est dite **courbe intégrale** de (E) si son équation $x \mapsto \overrightarrow{OM}(x, y(x)) = x\,\vec{i} + y(x)\,\vec{j}$ est telle que $f(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0$.

Le point générique de la transformée $\Gamma = \mathcal{T}(\gamma)$ d'une courbe intégrale γ de (E) ayant pour coordonnées (X, Y), établir que Γ est courbe intégrale de l'équation

$$(E') : f\left(Y', XY'-Y, X, \frac{1}{Y''}\right) = 0 \text{ où } Y' = \frac{dY}{dX} \text{ et } Y'' = \frac{d^2Y}{dX^2}.$$

4.2) On considère l'équation différentielle
$(E) : 2y'^2(xy'-y) - y''(1+y^2) = 0.$

4.2.1) Former l'équation différentielle (E') associée à (E).

4.2.2) On recherche des courbes intégrales Γ de (E') en en établissant une représentation paramétrique de paramètre $u = XY'-Y$; on pose alors $Y(X) = Z(u)$.
Former l'équation différentielle vérifiée par la fonction $u \mapsto Z(u)$ sous la forme $(1+u^2)\dfrac{dZ}{du} = 2Z^2 + 2uZ$.

Integrer cette équation en calculant d'abord $\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{1+u^2}{Z}\right)$.

Déduire des calculs précédent que X vérifie une équation différentielle de la forme $P(u)\dfrac{dX}{du} + X(u) = 0$ où P est un polynome de degré un.

Intégrer cette équation.

4.2.3) Donner une équation cartésienne de Γ.

Les courbes Γ sont des coniques ou des arcs de coniques, dont on étudiera les éventuelles branches infinies et éléments de symétrie.

4.2.4) En déduire les courbes intégrales γ de l'équation différentielle (E).
Les étudier.